2007 5/9 出席票　#5

学年：　　　　　　　　番号：　　　　　　　氏名：

以下の式は、すべて関係があることを示せ。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad (1.1-20, p.7)$$

$$\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}', \quad \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}', \quad \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}' \quad (2.6\text{-}5, p.50)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{\mathbf{r}}}{dt} = \boldsymbol{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\boldsymbol{e}_r \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.2-16, p.13)$$

上式から中式への変形は、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}' = 1 \cdot \boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}' = 1 \cdot \boldsymbol{j}', \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}' = 1 \cdot \boldsymbol{k}',$ のように代入したと考えればよい。

中式から下式への変形は、$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{e}_r, \quad \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{e}_\theta$ を代入したと考えればよい。２次元座標においては、$\boldsymbol{\omega} = (0, \quad 0, \quad \frac{d\theta}{dt})$ であるので、$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_r$ となるが、これをさらに、以下のように<u>ベクトルの外積は、行列式</u>という手順で、進めることができる。

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_r = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi \\ 0 & 0 & \frac{d\theta}{dt} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

。この結果が、最終項 $\boldsymbol{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$ に一致することは 容易に分かる。

上の要領で、$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\boldsymbol{e}_r \frac{d\theta}{dt}$ を証明せよ。